Przekształcenia quasikonforemne (praca domowa)

Zasady. Poniższe zadania należy oddać na piśmie do 26 kwietnia 2019. W formie papierowej prace mozna złożyć najpóźniej na ćwiczeniach, w formie elektronicznej do północy. Zadania należy rozwiązywać samodzielnie, oczywiście bez ograniczeń przy korzystaniu z literatury. Treści pojawiające się we wskazówkach również wymagają uzasadnienia. Uprzedzam, że mogły się tutaj znaleźć (niezamierzone) błędy – proszę je zgłaszać, to może wszystkim uprościć życie.

Definicja. Przekształcenie $w\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ na zbiorze otwartym $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ nazywamy K-quasikonforemnym, jeśli $K > 0$ oraz

$$|Dw|^2 \leqslant 2K \det Dw \qquad \text{w } \Omega. \tag{1}$$

Przy oznaczeniu $w = (p, q)$ powyższa nierówność ma postać

$$p_x^2 + p_y^2 + q_x^2 + q_y^2 \leqslant 2K(p_x q_y - p_y q_x).$$

Poniższe trzy zadania pokazują związki między przekształcenia quasikonforemnymi a funkcjami holomorficznymi, rozwiązaniami równań eliptycznych oraz funkcjami p-harmonicznymi.

Zadanie 1. Wykazać, że przekształcenie (p, q) jest 1-quasikonforemne wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $p + iq$ jest holomorficzna. Ponadto dla $K < 1$ jedyne przekształcenia K-konforemne to stałe.

Zadanie 2. Niech u będzie gładkim rozwiązaniem równania

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0 \quad \text{dla } (x, y) \in \Omega, \tag{2}$$

gdzie gładkie współczynniki a, b, c spełniają warunek eliptyczności

$$\begin{aligned} \lambda(x,y)(s^2+t^2) \leqslant as^2 + 2bst + ct^2 &\leqslant \Lambda(x,y)(s^2+t^2) \quad && \text{dla } (x,y) \in \Omega,\ (s,t) \in \mathbb{R}^2, \\ 1 \leqslant \Lambda(x,y)/\lambda(x,y) &\leqslant \gamma && \text{dla } (x,y) \in \Omega. \end{aligned} \tag{3}$$

Powyżej λ, Λ są funkcjami dodatnimi, a γ jest stałą. Sprawdzić, że przekształcenie $w = (u_x, -u_y)$ spełnia

$$|Dw|^2 \leqslant 2\gamma \det Dw,$$

a zatem jest γ-quasikonforemne.

Zadanie 3. Sprawdzić formalnie, że dla $p \geqslant 2$ równanie p-harmoniczne w dwóch wymiarach

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0$$

przyjmuje postać (2) ze współczynnikami a, b, c spełniającymi warunki (3) oraz współczynnikiem $\gamma = p - 1$.

Definicja. Dla $w \in W^{1,2}(\mathbf{B}_1, \mathbb{R}^2)$ również można zdefiniować K-quasikonforemność za pomocą nierówności (1), naturalnie należy ją wówczas rozumieć jako nierówność prawie wszędzie. Celem następnych zadań jest wykazanie hölderowskiej ciągłości takich przekształceń. Na potrzeby dalszych rozważań oznaczmy

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(r) &= \int_{\mathbf{B}_r} |Dw|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y, \\
\mathcal{J}(r) &= \int_{\mathbf{B}_r} \det Dw \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{B}_r} \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q.
\end{aligned}$$

Zadanie 4. Sprawdzić, że dla $w \in W^{1,2}(\mathbf{B}_1, \mathbb{R}^2)$ funkcje $\mathcal{D}, \mathcal{J}$ są dobrze określone i należą do klasy $W^{1,1}((0,1))$. Co więcej, nieliniowe przyporządkowania

$$\begin{aligned}
W^{1,2} \ni w \mapsto \mathcal{D} \in W^{1,1}, \\
W^{1,2} \ni w \mapsto \mathcal{J} \in W^{1,1}
\end{aligned}$$

są ciągłe w odpowiednich normach.

Zadanie 5. Wykazać, że dla $w \in W^{1,2}(\mathbf{B}_1, \mathbb{R}^2)$ zachodzi nierówność

$$\mathcal{J}(r) \leqslant Cr\mathcal{D}'(r) \quad \text{dla p.w. } r \in (0,1).$$

Wskazówka. Dla funkcji gładkich można zapisać $\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$ w postaci $\mathrm{d}((p-c)\mathrm{d}q)$ (gdzie c jest odpowiednio dobraną stałą) i skorzystać z twierdzenia Stokesa.

Zadanie 6. Niech $w \in W^{1,2}(\mathbf{B}_1, \mathbb{R}^2)$ będzie przekształceniem K-quasikonforemnym. Wykazać, że istnieje stała $\alpha(K) > 0$ taka, że

$$\mathcal{D}(r) \leqslant \mathcal{D}(R)\,(r/R)^{2\alpha} \quad \text{dla } 0 < r \leqslant R < 1.$$

Zadanie 7. Wykazać, że (pewien reprezentant) w spełnia na mniejszej kuli $\mathbf{B}_{1/2}$ warunek Höldera z wykładnikiem α otrzymanym w poprzednim zadaniu.

Przydatne narzędzia. W rozwiązaniach można powołać się na poniższe twierdzenia. Twierdzenie 1 jest szczególnym przypadkiem twierdzenia z wykładu/ćwiczeń. Dla $n = 2$ łatwo jest je uzyskać przez spojrzenie na odpowiednie szeregi Fouriera. Kluczowe jest, że stała zależy kwadratowo od promienia okręgu – aby to zauważyć, należy skorzystać z nierówności dla $r = 1$ i użyć skalowania. Twierdzenie 2 jest natomiast nieznacznym uogólnieniem twierdzenia o zanurzeniu $W^{1,p} \hookrightarrow C^{0,1-\frac{n}{p}}$. Istotnie, dla $p > n$ dowolna funkcja $u \in W^{1,p}(\mathbf{B}^n)$ spełnia założenia Twierdzenia 2 z $\alpha = 1-\frac{n}{p}$.

Twierdzenie 1 (nierówność Poincarégo na sferze). Dla dowolnej funkcji gładkiej u zachodzi

$$\int_{\partial \mathbf{B}_r} |u(y) - \bar{u}|^2 \, \mathrm{d}y \leqslant Cr^2 \int_{\partial \mathbf{B}_r} |\nabla u(y)|^2 \, \mathrm{d}y,$$

gdzie $\bar{u}$ oznacza średnią u na sferze $\partial \mathbf{B}_r$.

Twierdzenie 2 (Morreya). Niech $\mathbf{B}_1$ będzie kulą jednostkową w $\mathbb{R}^n$. Jeśli funkcja $u \in W^{1,n}(\mathbf{B}_1)$ spełnia

$$\int_{\mathbf{B}_r(x)} |\nabla u|^n \leqslant C_1 r^{n\alpha} \quad \text{dla każdej kuli } \mathbf{B}_r(x) \subseteq \mathbf{B}_1,$$

to pewien reprezentant u spełnia warunek Höldera z wykładnikiem α:

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C_1 C_2 |x - y|^{\alpha},$$

gdzie $C_2 = C_2(n, \alpha)$.